Tutorato Algebra Lineare – 03/06/25

Esercizio $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $T: V \to V$ lineare tale che

$$T(p(x)) = 2p(0)\,x^2 + p(1) .$$

1) Sia $R = \{ p(x) \in V : T(p(x)) = x^2 \} \subseteq V$.

Determinare se R è un sottospazio vettoriale di V e, nel caso, esibirne una base.

2) Sia $S = \{ p(x) \in V : T(T(p(x))) = 0 \} \subseteq V$.

Determinare se R è un sottospazio vettoriale di V e, nel caso, esibirne una base.

Soluzione

- Preliminari: sia $p(x) = ax^2 + bx + c$; chi è $T(p(x))$?

$$T(p(x)) = (2p(0))\,x^2 + p(1)$$

$$p(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

$$p(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$$

$$= (2c)\,x^2 + a + b + c .$$

1) Il polinomio nullo "$p(x) = 0$" appartiene a R ?

cioè quello con $a = b = c = 0$.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $p(\alpha) = 0$

$$T(0) = 2\underbrace{p(0)}_{=0}\,x^2 + \underbrace{p(1)}_{=0} = 0$$

polinomio nullo $p(x) = 0$

in realtà già lo sapevamo: poiché T è lineare (lo dice il testo), si ha $T(0) = 0$

Il polinomio x^2 è diverso dal polinomio nullo!

[$f(x) = x^2$ e $g(x) = 0$ sono FUNZIONI DIVERSE!
ma Quindi x^2 e 0 sono polinomi diversi]

$T(0) = 0 \neq x^2$

Quindi $0 \notin R$, dunque R NON è un ssp vettoriale di V.

2) Risposta rapida: sì, S è un sottospazio vett. perché $S = \ker(T \circ T)$ e il nucleo di una applicaz. lineare è un sottospazio vett.

Determiniamo quali $p(x) = ax^2 + bx + c$ appartengono a S.

$$T(p(x)) = 2p(0)\,x^2 + p(1) = (2c)\,x^2 + a+b+c$$

$$T(T(p(x))) = T(\overbrace{(2c)x^2 + a+b+c}^{q(x)}) = 2q(0)\,x^2 + q(1)$$

$q(0) = (2c)\cdot 0 + a+b+c = a+b+c$
$q(1) = (2c)\cdot 1 + a+b+c = a+b+3c$

$$= 2(a+b+c)\,x^2 + a+b+3c$$

$$p(x) \in S \iff T(T(p(x))) = 0$$
$$\iff 2(a+b+c)\,x^2 + a+b+3c = 0$$

cioè: è il polinomio nullo $0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0$

$$\iff \begin{cases} a+b+c = 0 \\ a+b+3c = 0 \end{cases}$$

Questo già ci dice che S è un sottospazio vett. di V perché è descritto da una «equazione cartesiana» (da un sistema di equazioni lineari omogenee).

In ogni caso, verifichiamo le proprietà di sottospazio vettoriale:

- $0 \in S$ [Vero: $T(T(0)) = T(0) = 0$]

- $p(x), q(x) \in S$. È vero che $p(x) + q(x) \in S$?

$$(p+q)(x) \underset{\text{def}}{:=} p(x) + q(x)$$

$p+q \in S \iff T(T(p+q)) = 0$, ma

$$T(T(p+q)) \underset{\text{linearità}}{=} T(T(p)+T(q)) \underset{\text{linearità}}{=} \underbrace{T(T(p))}_{\substack{=0 \\ (p\in S)}} + \underbrace{T(T(q))}_{\substack{=0 \\ (q\in S)}} = 0. \checkmark$$

- $p \in S$, $\lambda \in \mathbb{R}$. È vero che $\lambda \cdot p \in S$?

$$T(T(\lambda p)) \underset{\text{linearità}}{=} T(\lambda T(p)) \underset{\text{linearità}}{=} \lambda \underbrace{T(T(p))}_{\substack{=0 \\ (p\in S)}} = 0.$$

Quindi, "confermiamo" che S è un ssp vett. di V.

→ Determiniamo una base di S.

Sappiamo che $S = \left\{ ax^2+bx+c \in V : \begin{matrix} a+b+c=0 \\ a+b+3c=0 \end{matrix} \right\}$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b+3c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b \\ c=0 \end{cases}$$

sottraggo la prima

$$p(x) \in S \iff p(x) = a x^2 - a x = a(x^2 - x)$$

per qualche $a \in \mathbb{R}$.

In conclusione, una base di S è data da $\{x^2 - x\}$

In coordinate

$$V \xleftrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$$
$$ax^2+bx+c \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b+3c=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{R_2 \to R_2 - R_1}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ corrisponde al polinomio $x^2 - x$.

Alternativamente (ma equivalentemente) si può determinare la matrice associata a $T \circ T = T^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ in partenza e arrivo: basta determinare quella di T e poi farne il quadrato.

$$T(1) = 2x^2+1$$
$$T(x) = 1$$
$$T(x^2) = 1$$

$$\rightsquigarrow \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T \circ T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\ker \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$\begin{cases} R_3 \to \frac{1}{2} R_3 \\ \text{e riordino le righe} \end{cases}$

$\begin{cases} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_2 \to -\frac{1}{2} R_2 \end{cases}$

$R_1 \to R_1 - R_2$

corrisponde al polinomio $x^2 - x$

Esercizio. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale definito dall'equazione

$$2x + y - 2z = 0$$

e sia $v = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare

1) un vettore $w \in V$ tale che $\{v, w\}$ sia una base ortonormale di V;

2) un vettore del $\underbrace{\text{complemento ortogonale di } V}_{= V^\perp}$ di norma 9.

Soluzione

1) Cerco $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tale che

- $w \in V \longrightarrow 2x + y - 2z = 0$
- $\langle w, v \rangle = 0 \xrightarrow[\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0]{} -x + 4y + z = 0$

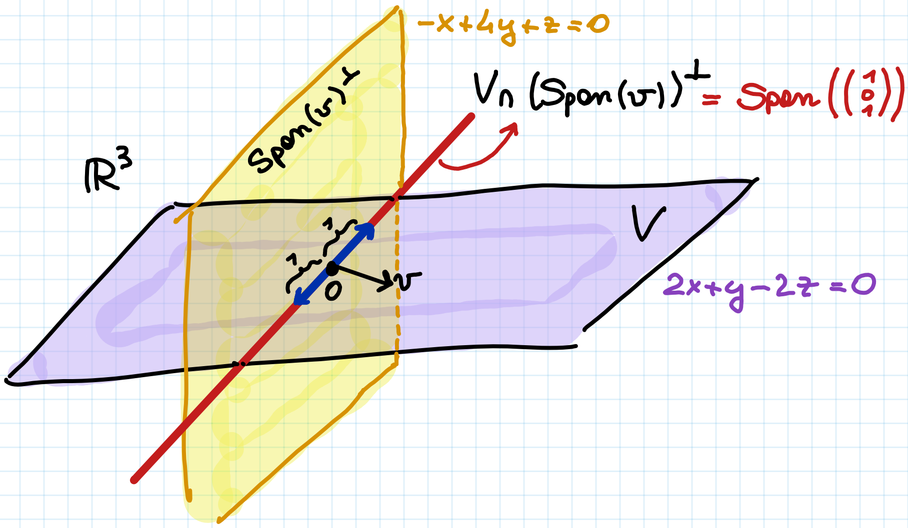
Dobbiamo quindi risolvere il sistema: $\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ -x + 4y + z = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 2R_1]{} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow x = \cancel{4y} + z = z \\ \longrightarrow y = 0 \end{matrix}$$

Quindi $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dunque $\left\{ v, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ORTOGONALE di V. Per renderla ORTONORMALE, normalizziamo: (notare che v ha già norma 1)

$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$, quindi $w = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (oppure anche $-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Traduzione geometrica del punto 1)



- $w \in V \longrightarrow$ "w vive nel piano viola"
- $\langle w, v\rangle = 0 \longrightarrow$ "w vive nel piano giallo"

"w giace sulla retta rossa"

dove si trovano tutti i vettori ortogonali a v

- $\|w\| = 1 \longrightarrow$ "w è uno dei due vettori blu"

2) Troviamo un vettore $u \in V^\perp$ tale che $\|u\| = 9$

Due strade:

2.1) "Strada lenta"

$$\begin{cases} \langle u, v\rangle = 0 \\ \langle u, w\rangle = 0 \\ \|u\| = 9 \end{cases}$$

impongo $u \in V^\perp$ $\longrightarrow$ dà un sistema in 3 incognite

e si risolve come prima.

2.2) "Strada veloce"

V descritto da $2x + y - 2z = 0 \Rightarrow V^\perp = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$.

Recap: $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - 2z = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}^{\perp} \rightarrow$ notazione comoda che indica $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)^{\perp}$

Quindi, posto $u = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, si ha $\|u\| = \sqrt{9\alpha^2} = \underbrace{3|\alpha|}_{\text{vogliamo } 9}$,

per cui $|\alpha| = 3$, ossia $\alpha = \pm 3$.

Dunque, i possibili vettori u sono $\pm \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

<u>Esercizio</u> Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha:

1) A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

2) $\lambda = 3$ è autovalore di A?

3) $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore per A?

Soluzione

Calcoliamo

$$P_A(t) = \det(A - tI)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-t & -1 \\ 1 & a-t \end{pmatrix}$$

$$= (1-t)(a-t) + 1$$

$$= t^2 - (a+1)t + a + 1 .$$

Autovalori REALI di A : ESISTONO $\Leftrightarrow$ $\Delta \geq 0$

ESISTONO E SONO DISTINTI $\Leftrightarrow$ $\Delta > 0$

$$\Delta = (a+1)^2 - 4(a+1) = (a+1)(a-3)$$

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -1 \ \vee \ a \geq 3$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow a < -1 \ \vee \ a > 3$

1) Diagonalizzabilità di A in funzione di $a \in \mathbb{R}$.

- Se $a < -1 \ \vee \ a > 3$, allora A ha due autovalori reali e distinti, quindi è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
- Se $-1 < a < 3$, allora A non ha autovalori reali (ma ne ha due complessi distinti), quindi NON è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (ma lo è su $\mathbb{C}$).
- Restano i casi $a = -1$ e $a = 3$, da trattare separatamente.

$a = -1 \Rightarrow P_A(t) = t^2$ ($\lambda = 0$ unico autovalore: $m_{alg}(0) = 2$)

$a = 3 \Rightarrow P_A(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$ ($\lambda = 2$ unico autovalore: $m_{alg}(2) = 2$)

Verifichiamo se $m_{alg} = m_{geo}$ nei due casi.

$\boxed{a=-1} \Rightarrow \underset{A-0I}{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 1

$$m_{geo}(0) = \dim(\ker(A)) = 2 - rk(A) = 1 \neq 2 = m_{alg}(0).$$

[In effetti, $m_{geo}(0) = 2 \iff \dim(\ker(A)) = 2 \iff \ker(A) = \mathbb{R}^2 \iff A$ è la matrice nulla]

$\boxed{a=3} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{(\lambda=2)}{A-2I} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 1

e di nuovo $\quad m_{geo}(2) = 1 \neq 2 = m_{alg}(2)$

→ A non diagonalizzabile per $a \in \{-1, 3\}$ (nemmeno su $\mathbb{C}$).

In conclusione: $\boxed{A \text{ diagonalizzabile su } \mathbb{R} \iff a < -1 \lor a > 3}$

2) Quando $\lambda = 3$ è autovalore di A ?

Basta imporre che $\lambda = 3$ sia radice del polinomio caratteristico:

$$p_A(t) = t^2 - (a+1)t + a + 1$$

Valuto in $t = 3$:

$$p_A(3) = 9 - (a+1)\cdot 3 + a + 1 = 9 - 2(a+1) = 7 - 2a$$

Impongo che 3 sia una radice:

$$p_A(3) = 0 \iff 7 - 2a = 0 \iff \boxed{a = \frac{7}{2}}$$

3) Quando $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore per A ?

v autovettore per A $\underset{\text{def.}}{\iff}$ $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $Av = kv$
$(v \neq 0)$

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4-a \end{pmatrix} \overset{?}{=} k \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 5 = 4k \\ 4-a = -k \end{cases}$$

Da cui $\begin{cases} k = 5/4 \\ a = 4+k = 21/4 \end{cases}$ il valore di k è forzato dalla prima entrata

Quindi la risposta è $\boxed{a = \frac{21}{4}}$.

[In tal caso $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $k = \frac{5}{4}$.]